פתרונות מלאים
מועד ב', סמסטר אביב תשע"ג - 104016
18.10.13

מס. סטודנט:

פקולטה:

- משך הבוחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- בשאלות 1-4 יש **לנמק** היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב. בשאלות 5-9 יש לסמן את התשובה הנכונה. בכל שאלה יש רק תשובה נכונה אחת.
- שאלת שיעורי הבית היא שאלה 4

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 5-9

	שאלה מס' 5	שאלה מס' 6	שאלה מס' 7	שאלה מס' 8	שאלה מס' 9
א					
ב					
ג					
ד					
ה					

לבודקים: יש לרשום את הציונים בדף השער.

<u>שאלה מס' 1 :</u> (20 נקודות)

יהי $V = R_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2 עם מקדמים ממשיים מעל R, ויהי

$T : R_2[x] \to R_2[x]$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י :

$$T(f(x)) = f(x) - (x-2)f'(x)$$

כאשר $f'(x)$ היא הנגזרת הראשונה של $f(x)$.

א. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. (5 נק') מצאו בסיס לתת מרחב U של $V = R_2[x]$ כך ש- $V = U \oplus Ker(T)$.

ג. (5 נק') מצאו בסיס לתמונה של T כך שבכל פולינום בבסיס זה המקדם של x^2 שווה ל- (-4) .

ד. (5 נק') הוכיחו שקיימת העתקה לינארית $S : R_2[x] \to R_2[x]$ כך ש- $T \circ S = 0$ אבל $S \neq 0$.

<u>פתרון שאלה מס' 1 :</u>

תחילה נרשום את ההעתקה בצורה מפורשת :

$$T\left(a+bx+cx^2\right) = a+bx+cx^2-(x-2)(b+2cx) = a+bx+cx^2-bx-2cx^2+2b+4cx$$
$$T\left(a+bx+cx^2\right) = a+2b+4cx-cx^2$$

א. בסיס ומימד לגרעין : נשווה ל- 0 :

$$T\left(a+bx+cx^2\right) = a+2b+4cx-cx^2 = 0$$
$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 4c=0 \\ -c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2b \\ c=0 \end{cases}$$
$$Ker(T) = \left\{-2b+bx \mid b \in R\right\} = sp\left\{2-x\right\}$$

לכן בסיס לגרעין הוא : $B_{Ker(T)} = \left\{2-x\right\}$ והמימד הוא 1.

ב. מאחר ו- $\dim R_2[x] = 3$ אנו זקוקים לשני פולינומים בלתי תלויים לקבלת בסיס למרחב U.

נרשום את הקואורדינטות של הבסיס לגרעין שמצאנו במטריצה ונשלים אותה למטריצה מדרגה 3 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפולינומים המתאימים להשלמה זו הם : $B_U = \left\{x\ ,\ x^2\right\}$. מאחר ומימד U הוא 2 , מימד הגרעין

הוא 1 ומימד $U + Ker(T)$ הוא 3 הרי שזהו תת מרחב של $R_2[x]$ מאותו מימד ולכן

$R_2[x] = U + Ker(T)$. בנוסף לפי משפט המימדים השני נקבל :

$$\dim\left(U \cap Ker(T)\right) = \dim\left(U\right) + \dim\left(Ker(T)\right) - \dim\left(U + Ker(T)\right) = 2+1-3 = 0$$

כלומר $U \cap Ker(T) = \{0\}$ והסכום הוא סכום ישר, כלומר $R_2[x] = U \oplus Ker(T)$ כנדרש.

ג. בסיס ומימד לתמונה: ממשפט המימדים השני וסעיף א' נקבל:

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim R_2[x] - \dim Ker(T) = 3 - 1 = 2$$

למציאת בסיס ניקח איבר כללי של התמונה ונוציא סקלרים לקבלת קבוצה פורשת, וממנה נבחר שניים בלתי תלויים לקבלת בסיס:

$$T\left(a + bx + cx^2\right) = a + 2b + 4cx - cx^2 = a(1) + b(2) + c(4x - x^2)$$

נבחר כבסיס לתמונה את: $\{1,\ 4x - x^2\}$. מאחר ודורשים שהמקדם של x^2 שווה ל- (-4) נכפול את הפולינום השני בבסיס ב- 4, נקבל את $16x - 4x^2$. עתה נתקן את הפולינום הראשון ע"י הוספה של פולינום זה לפולינום הראשון ונקבל את הבסיס הבא העונה על הדרישות:

$B_{\operatorname{Im}T} = \{1 + 16x - 4x^2\ ,\ 16x - 4x^2\}$. (שימו לב שזהו אכן בסיס, כי אלו שני וקטורים בת"ל ב- $\operatorname{Im}T$ שהוא תת מרחב ממימד 2.)

ד. לפי משפט, מספיק להגדיר את S על איברי בסיס של $R_2[x]$ ואז מובטחת קיומה של העתקה לינארית יחידה המקיימת את התנאים המוגדרים.

מאחר ובהעתקה $T \circ S$ מפעילים תחילה את S ורק אז את T, מספיק לדאוג לכך שאחרי הפעלת S נקבל רק פולינומים בגרעין של T, כך שהפעלת T תשלח את כל הפולינומים ל- 0. נבחר בסיס סטנדרטי של $R_2[x]$ ונגדיר:

$$S(1) = 0$$
$$S(x) = 0$$
$$S(x^2) = 2 - x$$

ברור כי $S \neq 0$ שכן $S(x^2) = 2 - x$ ובנוסף מתקיים:

$$T \circ S(1) = T(S(1)) = T(0) = 0$$
$$T \circ S(x) = T(S(x)) = T(0) = 0$$
$$T \circ S(x^2) = T(S(x^2)) = T(2 - x) \underset{2-x \in Ker(T)}{=} 0$$

מאחר ו- $\operatorname{Im}(T \circ S)$ נפרש רק ע"י וקטור ה- 0 הרי ש- $T \circ S = 0$.

<u>שאלה מס' 2</u> : (30 נקודות)

יהי $T: R^{2\times 2} \to R^{2\times 2}$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י :

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ויהי E הבסיס הסטנדרטי של $R^{2\times 2}$:

$$E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. (5 נק') מצאו את $[T]_E$.

ב. (10 נק') מצאו את כל הערכים העצמיים של T ואת ריבויים האלגברי והגיאומטרי.

ג. (10 נק') האם T לכסין? אם כן נמקו מדוע, ומצאו בסיס B של $R^{2\times 2}$ שביחס אליו $[T]_B$ אלכסונית.

מצאו גם את $[T]_B$. אם T לא לכסין, נמקו מדוע.

ד. (5 נק') האם קיים בסיס C של $R^{2\times 2}$ שביחס אליו המטריצה המייצגת היא :

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

אם קיים, הוכיחו שקיים בסיס כזה (**אין צורך למצוא אותו במפורש**), אם לא קיים, נמקו מדוע לא קיים בסיס כזה.

<u>פתרון שאלה מס' 2 :</u>

תחילה נרשום את ההעתקה בצורה מפורשת :

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

א. מאחר ו- E הוא הבסיס הסטנדרטי הרי ש :

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. במקום לחשב פולינום אופייני, נעזר במשפטים :

* הדרגה של $[T]_E$ היא 2 לכן $\lambda_1 = 0$ הוא ע"ע מר"ג : $n - r\left(0I - [T]_E\right) = 4 - r\left([T]_E\right) = 4 - 2 = 2$.

* סכום כל שורה שווה ל- 2 לכן $\lambda_2 = 2$ הוא ע"ע.

* סכום כל הע"ע שווה לעקבה לכן : $tr\left([T]_E\right) = 4 = 0 + 0 + 2 + \lambda_3$ לכן $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

מצאנו 4 ע"ע לכן מצאנו את כולם. קיבלנו :

$\lambda_1 = 0$ ע״ע מר״א 2 וגם ר״ג השווה ל- 2.

$\lambda_2 = 2$ ע״ע מר״א השווה ל- 2. נחשב ר״ג:

$$n - r\left(\left[T\right]_E - 2I\right) = 4 - r\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

ג. לפי סעיף ב׳, לכל ע״ע הר״א שווה לר״ג ולכן T לכסין. למציאת בסיס כך שביחס אליו המטריצה המייצגת היא אלכסונית, נמצא ו״ע.

תחילה, נמצא את הו״ע של $\left[T\right]_E$ ומהם נמצא ו״ע של T.

ו״ע עבור $\lambda_1 = 0$, נפתור $\left(\left[T\right]_E - 0I\right)\bar{x} = 0$ או $\left[T\right]_E \bar{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_2}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x + z = 0 \\ y + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x \\ w = -y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{\lambda=0}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

מכאן כי בסיס עבור המרחב העצמי של $\lambda_1 = 0$ הוא: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$.

ו״ע עבור $\lambda_2 = 2$, נפתור $\left(\left[T\right]_E - 2I\right)\bar{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_2}}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ w = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{\lambda=2}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

מכאן כי בסיס עבור המרחב העצמי של $\lambda_2 = 2$ הוא: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

מכאן, בסיס עבורו המטריצה המייצגת היא אלכסונית הוא:

$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ והמטריצה המייצגת לפי בסיס זה היא:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

ד. על פי משפט, מטריצות מייצגות את אותה העתקה אם״ם הן דומות. לכן יש לבדוק האם המטריצה הנתונה דומה למטריצה $[T]_B$ או $[T]_E$ (שכמובן דומות). על פי משפט אחר, למטריצות דומות יש את אותה הדרגה. מאחר ו- $r\left([T]_B\right)=2$ ואילו המטריצה הנתונה היא מדרגה 1, הרי שהמטריצות לא דומות ולכן אינן מייצגות את אותה העתקה, כלומר בסיס C כזה לא קיים.

<u>שאלה מס' 3</u> : (15 נקודות) **אין קשר בין הסעיפים**

א. (10 נק') יהי $V=C^3$ מעל C עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, כלומר אם $u=(a_1,a_2,a_3)\ ,\ w=(b_1,b_2,b_3)$ אז: $\langle u,w\rangle=\sum_{j=1}^{3}a_j\overline{b_j}$.

יהי W תת המרחב הבא של V:

$$W=span\{v_1=(1+i,0,1-i)\ ,\ v_2=(1+i,\ 2i\ ,\ 1-i)\}$$

מצאו בסיס אורתונורמלי $B=\{\varphi_1\ ,\ \varphi_2\}$ של W ע"י ביצוע תהליך גרם-שמידט על $\{v_1,v_2\}$ (בסדר זה).

ב. (5 נק') יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל C, ויהיו $u,v\in V$.

הוכיחו: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$ אם"ם $\langle u,v\rangle$ מדומה טהור (כלומר אם"ם $\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle)=0$).

<u>פתרון שאלה מס' 3 :</u>

א. נבצע תהליך גרם שמידט:

$$v_1=(1+i,0,1-i)\ ,\ v_2=(1+i,\ 2i\ ,\ 1-i)$$

$$\varphi_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{(1+i,0,1-i)}{\sqrt{(1+i)(1-i)+0\cdot 0+(1-i)(1+i)}}=\frac{(1+i,0,1-i)}{\sqrt{2+0+2}}=\frac{(1+i,0,1-i)}{2}$$

$$\psi_2=v_2-\langle v_2,\varphi_1\rangle\varphi_1=(1+i,\ 2i\ ,\ 1-i)-\left\langle(1+i,\ 2i\ ,\ 1-i)\ ,\ \frac{(1+i,0,1-i)}{2}\right\rangle\frac{(1+i,0,1-i)}{2}$$

$$=(1+i,\ 2i\ ,\ 1-i)-\frac{1}{4}\langle(1+i,\ 2i\ ,\ 1-i)\ ,\ (1+i,0,1-i)\rangle(1+i,0,1-i)=$$

$$(1+i,\ 2i\ ,\ 1-i)-\frac{1}{4}\big((1+i)(1-i)+2i\cdot 0+(1-i)(1+i)\big)(1+i,0,1-i)=$$

$$(1+i,\ 2i\ ,\ 1-i)-\frac{1}{4}\cdot 4\cdot(1+i,0,1-i)=(0\ ,\ 2i\ ,\ 0)$$

$$\varphi_2=\frac{\psi_2}{\|\psi_2\|}=\frac{(0\ ,\ 2i\ ,\ 0)}{\sqrt{0+2i\cdot(-2i)+0}}=\frac{(0\ ,\ 2i\ ,\ 0)}{2}=(0\ ,\ i\ ,\ 0)$$

$$\left\{\frac{(1+i,0,1-i)}{2}\ ,\ (0\ ,\ i\ ,\ 0)\right\}$$

ב. נפתח את אגף ימין:

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle=\|u\|^2+\|v\|^2+\langle u,v\rangle+\overline{\langle u,v\rangle}=$$
$$=\|u\|^2+\|v\|^2+2\,\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle)$$

קיבלנו כי $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2+2\,\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle)$ לכן $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$ אם"ם $2\,\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle)=0$ וזה קורה אסם $\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle)=0$ כלומר אם"ם $\langle u,v\rangle$ מדומה טהור.

<u>שאלה מס' 4</u> : (10 נקודות)

יהיו U,V,W מרחבים וקטורים מעל F כולם ממימד סופי, ויהיו $S:U\to V$, $T:V\to W$ העתקות ליניאריות.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. (5 נק') $Ker(S)\subset Ker(TS)$.

ב. (5 נק') אם $\mathrm{Im}(S)\cap Ker(T)=\{0\}$ אז $Ker(S)=Ker(TS)$.

<u>פתרון שאלה מס' 4</u> :

א. יהי $v\in Ker(S)$ כלומר $S(v)=0$, צריך להוכיח כי $v\in Ker(TS)$ כלומר צריך להוכיח כי $(TS)(v)=0$, ואכן:

$$(TS)(v)=T(S(v))=T(0)=0$$

ב. מסעיף א' נובע כי $Ker(S)\subset Ker(TS)$. להוכחת השוויון יש להוכיח הכלה הפוכה כלומר יש להוכיח: $Ker(TS)\subset Ker(S)$. יהי $v\in Ker(TS)$. צריך להוכיח כי $v\in Ker(S)$:

מהנתון מתקיים: $T(S(v))=0$. נסמן: $S(v)=w$ אז $0=T(S(v))=T(w)$ כלומר $w\in KerT$.

בנוסף, $S(v)=w$ לכן $w\in \mathrm{Im}\,S$. קיבלנו כי $w\in \mathrm{Im}(S)\cap Ker(T)=\{0\}$ ולכן $w=0$ כלומר $S(v)=w=0$ כלומר $v\in Ker(S)$.

<u>הערה: מאחר והיו טורים, יש להסתכל על התשובה הנכונה ולא על מספר הסעיף.</u>

<u>שאלה מס' 5</u> : (5 נקודות)

יהיו $A,B\in R^{7\times 7}$. יהי $U=\{v\in R^7 \mid Av=0\}$ ויהי W מרחב העמודות של B.

אזי בהכרח :

א. אם $R^7=U\oplus W$ אז $AB=0$.

ב. אם $R^7=U\oplus W$ אז $A=B$.

ג. אם $AB=0$ אז $R^7=U\oplus W$.

ד. אם $AB=0$ אז $\dim(W)\le\dim(U)$.

ה. אם $rank(A)=rank(B)$ אז $R^7=U\oplus W$;

<u>פתרון שאלה מס' 5:</u>

לפי הגדרת המרחבים מתקיים : U הוא מרחב הפתרונות של $A\bar{x}=0$ לכן מימד U שווה למימד מרחב הפתרונות של המערכת כלומר $\dim(U)=7-r(A)$. Wהוא מרחב העמודות של המטריצה B ולכן $\dim(W)=r(B^t)=r(B)$. נעבור על כל הטענות ונראה איזו נכונה :

א. **לא נכון.** נבחר $A=B=I_7$. A הפיכה לכן למערכת $A\bar{x}=0$ רק הפתרון הטריוויאלי כלומר $U=\{0\}$. B גם הפיכה ולכן מרחב העמודות של B הוא המרחב כולו. ברור כי $U\cap W=\{0\}$ ולכן הסכום ישר, כלומר : $U\oplus W=\{0\}\oplus R^7=R^7$ אך $AB=I_7\neq 0$.

ב. **לא נכון.** נבחר $A=I_7$, $B=2I_7$. אותו נימוק עובד כמו בסעיף א' לכן $U\oplus W=\{0\}\oplus R^7=R^7$ אבל $A\neq B$.

ג. **לא נכון.** נבחר $A=I_7$, $B=0$, מתקיים $AB=0$ אבל $U=W=\{0\}$ ולכן $R^7\neq U\oplus W$.

ד. **נכון.** אם $AB=0$ אז עמודות B הן פתרונות של המערכת ההומוגנית $A\bar{x}=0$ כלומר $W\subset U$ כלומר W הוא תת מרחב של U ולכן $\dim(W)\le\dim(U)$.

ה. **לא נכון.** נבחר $A=E_{11}$, $B=E_{77}$ (E_{ij} היא מטריצה בה יש 1 במקום ה (i,j) וכל השאר אפסים), אז שתי המטריצות הן מדרגה 1 כנדרש אבל $U\cap W\neq\{0\}$ שכן e_7 (הווקטור השביעי בבסיס הסטנדרטי של R^7) נמצא בחיתוך של שני מרחבים אלה.

לכן הסימון הנכון בטור זה הוא ד'.

שאלה מס' 6 : (5 נקודות)

יהיו V מרחב וקטורי מעל F, ויהיו $u,v,w\in V$ וקטורים תלויים ליניארית, אז הקבוצה הבאה :

$$\{u+2v-w\ ,\ 2u+3v+w\ ,\ u-v+aw\}$$

תלויה לינארית עבור :

א. $a=0$; ב. $a=8$; ג. $a=-3$; ד. כל ערך של a ; ה. אף ערך של a

פתרון שאלה מס' 6 :

נסתכל על : $W=sp\{u,v,\ w\}$. זהו תת מרחב של V, הנפרש ע"י 3 וקטורים תלויים ליניארית ולכן $\dim(W)\le 2$. עתה, כל הוקטורים הנתונים הם צרופים ליניאריים שלהם ולכן $u+2v-w\ ,\ 2u+3v+w\ ,\ u-v+aw\in W$. אלו הם 3 וקטורים במרחב ממימד 2 ולכן הם תלויים ליניארית לכל ערך של a.

סימון נכון בטור זה : ד'.

שאלה מס' 7 : (5 נקודות)

יהי $w\neq 1$ מספר מרוכב המקיים $w^3=1$, ותהי $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&w&w^2\\1&w^2&w\end{pmatrix}$ אזי :

א. $w^2+w=1$ וגם $\det(A)=(w-1)^2(w+1)$.

ב. $w^2+w=-1$ וגם $\det(A)=-(w-1)^2(w+1)$.

ג. $w^2+w=1$ וגם $\det(A)=(w-1)^3$.

ד. $w^2+w=-1$ וגם $\det(A)=-(w-1)^3$.

ה. $w^2+w=0$ וגם $\det(A)=-(w-1)^2(w^2+2w)$.

פתרון שאלה מס' 7 :

מהנתון, w הוא שורש יחידה מסדר 3 השונה מ- 1 ולכן : $w=cis120^\circ$ או $w=cis240^\circ$. במקרה הראשון $w^2=cis240^\circ$, ובמקרה השני $w^2=cis480^\circ=cis120^\circ$, כך שבכל מקרה $1,\ w,w^2$ הם 3 שורשי היחידה מסדר 3 ולכן לפי משפט מתקיים : $1+w+w^2=0$ או $w+w^2=-1$. נותר לחשב את הדטרמיננטה (נשים לב גם ש $1+w=-w^2$) :

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&w&w^2\\1&w^2&w\end{vmatrix}\underset{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1}}{=}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&w-1&w^2-1\\0&w^2-1&w-1\end{vmatrix}\underset{R_3\to R_3-(w+1)R_2}{=}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&w-1&w^2-1\\0&0&(w-1)-(w+1)(w^2-1)\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&w-1&w^2-1\\0&0&(w-1)-(w+1)^2(w-1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&w-1&w^2-1\\0&0&(w-1)(1-(w+1)^2)\end{vmatrix}=$$

$$1\cdot(w-1)\cdot(w-1)\underbrace{(1-(w+1)^2)}_{-w^2}=(w-1)^2(1-w^4)=(w-1)^2(1-w\cdot w^3)=(w-1)^2(1-w)=-(w-1)^3$$

קיבלנו $\det(A)=-(w-1)^3$, לכן הסימון הנכון בטור זה הוא: ד'.

<u>שאלה מס' 8</u>: (5 נקודות)

יהי $V=R^2$ מעל R. נתונים הבסיסים הבאים של V:

$$E=\{e_1=(1,0)\ ,\ e_2=(0,1)\}$$
$$B=\{b_1=(3,-1)\ ,\ b_2=(1,0)\}$$

יהי $T:R^2\to R^2$ אופרטור לינארי לא הפיך. נתון כי

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&2\\a&6\end{pmatrix}$$

אז $[T]_B$ שווה ל:

א. $\begin{pmatrix}-1&-1\\8&8\end{pmatrix}$; ב. $\begin{pmatrix}-3&-3\\10&10\end{pmatrix}$; ג. $\begin{pmatrix}2&1\\10&5\end{pmatrix}$; ד. $\begin{pmatrix}0&0\\0&7\end{pmatrix}$; ה. $\begin{pmatrix}1&1\\6&6\end{pmatrix}$

<u>פתרון שאלה מס' 8</u>:

T לא הפיך ולכן המטריצה המייצגת לא הפיכה, ומכאן כי $a=3$. נמצא $[T]_B$ על פי הנוסחה:

$[T]_B=P^{-1}[T]_E\underset{E\to B}{P}$: E הבסיס הסטנדרטי ולכן:

$$\underset{E\to B}{P}=\begin{pmatrix}3&1\\-1&0\end{pmatrix}\ ,\ P^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\end{pmatrix}$$

ולכן: $[T]_B=P^{-1}[T]_E\underset{E\to B}{P}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-6\\10&20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3\\10&10\end{pmatrix}$

והסימון הנכון בטור זה הוא: ב'.

<u>שאלה מס' 9</u> : (5 נקודות)

יהיו $A,B,C \in R^{n\times n}$ מטריצות המקיימות $ABC = I$. אלו משלוש הטענות הבאות לגבי המטריצות הנתונות <u>בהכרח</u> נכונות?

1. $BCA = I$; 2. $ACB = I$; 3. $CBA = I$

א. רק טענה 1 נכונה

ב. רק טענה 2 נכונה

ג. רק טענה 3 נכונה

ד. טענות 1,2,3 כולן נכונות

ה. טענות 1,2,3 כולן לא נכונות

<u>פתרון שאלה מס' 9</u> :

מהנתון $ABC = I$ לכן $A(BC) = I$ כלומר $BC = A^{-1}$ ולכן $I = A^{-1}A = (BC)A$ כלומר טענה 1 נכונה. נותר להראות שטענות 2 ו- 3 לא נכונות.

נבחר את A ו- C להיות מטריצות הפיכות כלשהן עם הפכית נחמדה (למשל עם דטרמיננטה 1) ואז כדי לקיים את הנתון $ABC = I$, נבחר את B להיות : $B = A^{-1}C^{-1}$ כי אז : $ABC = A\left(A^{-1}C^{-1}\right)C = I$,

למשל, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. אם טענות 2 ו- 3 נכונות אז חייב

להתקיים כי $CB = A^{-1}$ אבל : $CB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$ ואילו $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.